Árpád Pál Vasile Pop Vasile Ureche

ASTRONOMIE
Culegere de probleme
(cu soluții)

Presa Universitară Clujeană

Cuprins

Capitolul 1

Elemente de geometrie pe sferă şi de trigonometrie sferică

1.1. *Care sunt elementele de bază ale geometriei sferice?*

Răspuns. Geometria sferică se ocupă cu studiul figurilor de pe o sferă. Dreptelor şi segmentelor de dreaptă din geometria plană le corespund cercuri şi arce de cercuri pe sferă.

Deosebim:

-cercuri mari, ale căror plane trec prin centrul sferei;

-cercuri mici, ale căror plane nu trec prin centrul sferei.

Prin două puncte ale sferei trece un cerc mare şi numai unul, dacă cele două puncte nu sunt diametral opuse. În adevăr, prin două puncte A, B de pe sferă şi prin centrul O trece un plan unic dacă punctele A, O şi B nu sunt coliniare. Intersecţia acestui plan cu sfera determină cercul mare ce trece prin A şi B (fig.1.1).

Diametrul sferei perpendicular pe planul unui cerc intersectează suprafaţa sferei în două puncte numite polii cercului.

Două cercuri mari de pe aceeaşi sferă se intersectează întotdeauna în două puncte diametral opuse.

Unghiul format de două arce de pe sferă, care se intersectează într-un punct, este, prin definiţie, unghiul ($\leq 180°$) format de tangentele duse la cele două arce în punctul lor de intersecţie. În particular, măsura

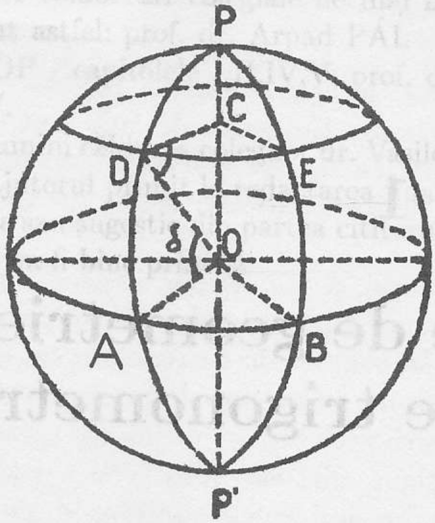

Figura 1.1: Cercuri pe sferă.

unghiului sferic APB (fig.1.1) este egală cu:

- măsura unghiului diedru al planelor PAP' şi PBP';
- măsura arcului AB de pe cercul mare ai cărui poli sunt P şi P'.

Măsura unui arc de cerc mic de pe sferă se poate exprima cu ajutorul măsurii arcului de cerc mare. Pentru a arăta acest lucru, să considerăm cercul mic cu centrul în C şi care are planul paralel cu planul cercului AB cu centrul în O. Cercurile mari PAP' şi PBP' determină pe cercul mic arcul DE.

Avem:

$$\left.\begin{array}{l} \text{măs}(\widehat{DE}) = CD \cdot \text{măs}(\widehat{DCE}) \\ \text{măs}(\widehat{AB}) = OA \cdot \text{măs}(\widehat{AOB}) \\ \text{măs}(\widehat{DCE}) = \text{măs}(\widehat{AOB}) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\text{măs}(\widehat{DE})}{\text{măs}(\widehat{AB})} = \frac{CD}{OA} = \frac{CD}{OD} = \cos\delta$$

şi atunci putem scrie:

$$\text{măs}(\widehat{DE}) = \text{măs}(\widehat{AB}) \cdot \cos\delta. \tag{1.1}$$

Fusul sferic este figura de pe sferă formată din două semicercuri mari ale căror extremităţi coincid cu extremităţile diametrului lor comun(fig.1.2). Elementele fusului sferic sunt:

- două laturi, ABA' şi ACA' de 180° fiecare;
- două unghiuri congruente, $\hat{A}$ şi $\hat{A}'$.

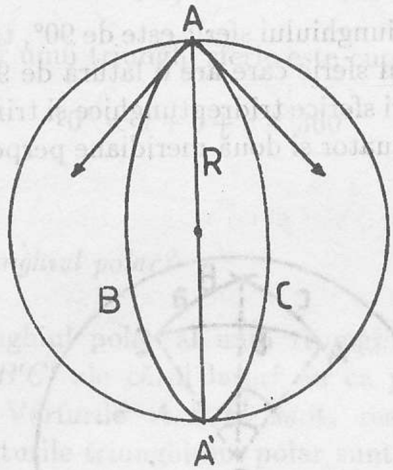

Figura 1.2: Fusul sferic.

Dată fiind măsura unghiului A al fusului sferic de pe sfera de rază R, se poate determina aria fusului, utilizând regula de trei simplă, şi anume: la unghiul cu măsura 2π corespunde aria $4\pi R^2$, iar la măs$(\hat{A})$ corespunde aria S_A; rezultă:

$$S_A = \frac{4\pi R^2}{2\pi} \cdot \text{măs}(\hat{A}) = 2R^2 \text{măs}(\hat{A}), \tag{1.2}$$

care exprimă faptul că aria fusului sferic este proporţională cu măsura unghiului său.

Poligonul sferic este figura de pe sferă mărginită de arce de cerc mare (laturile poligonului) mai mici de 180° şi limitate de intersecţiile lor consecutive.

Un poligon sferic se numeşte convex dacă este situat de aceeaşi parte în raport cu fiecare din cercurile mari cărora le aparţin laturile sale. În caz contrar, poligonul se numeşte concav.

1.2. *Ce este triunghiul sferic?*

Răspuns. Triunghiul sferic este cel mai simplu poligon sferic convex. Elementele triunghiului sferic sunt: trei laturi a, b, c şi trei unghiuri A, B, C (fig.1.3), fiecare din acestea fiind mai mici de $180°$ (triunghiuri euleriene).

Dacă un unghi al triunghiului sferic este de $90°$, triunghiul se numeşte dreptunghic. Triunghiul sferic care are o latură de $90°$ se numeşte rectilater. Există triunghiuri sferice tridreptunghice şi trirectilatere (exemplu: triunghiul format de ecuator şi două meridiane perpendiculare între ele).

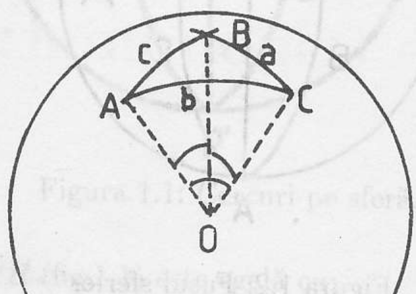

Figura 1.3: Triunghiul sferic.

Unind vârfurile A, B, C ale triunghiului sferic ABC cu centrul O al sferei de rază R, se obţine triedrul $OABC$ corespunzător triunghiului sferic ABC.

Între feţele triedrului şi laturile triunghiului sferic există relaţiile:

$$\text{măs}(\widehat{AOB}) = \text{măs}(\overset{\frown}{c}), \quad \text{măs}(\widehat{BOC}) = \text{măs}(\overset{\frown}{a}), \quad \text{măs}(\widehat{AOC}) = \text{măs}(\overset{\frown}{b}).$$

Un unghi al triunghiului sferic, de exemplu cel din A, este definit de tangentele duse în A la arcele de cerc AB şi AC. Deoarece aceste tangente sunt perpendiculare pe OA, rezultă că ele formează tocmai unghiul plan al diedrului definit de feţele AOC şi AOB. În baza proprietăţilor generale ale triedrului, deducem că:

1) O latură a triunghiului sferic este mai mică decât suma celorlalte două; diferenţa a două laturi este mai mică decât latura a treia:

$$a < b + c; \qquad a - b < c. \tag{1.3}$$

2) Suma laturilor unui triunghi sferic este cuprinsă între 0° şi 360°:

$$0^\circ < a + b + c < 360^\circ. \tag{1.4}$$

1.3. *Ce este triunghiul polar?*

Răspuns. Triunghiul polar al unui triunghi sferic dat ABC este triunghiul sferic $A'B'C'$ ale cărui laturi au ca poli vârfurile triunghiului dat (fig.1.4). Vârfurile A, B, C sunt, respectiv, polii laturilor $B'C', A'C', B'A'$. Laturile triunghiului polar sunt suplemente ale unghiurilor corespunzătoare ale triunghiului dat şi viceversa. Pentru justificarea acestei afirmaţii, observăm (fig.1.4) că:

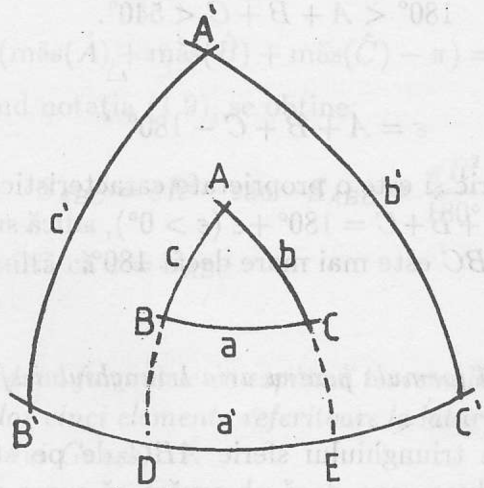

Figura 1.4: Triunghiul polar al unui triunghi sferic dat.

$$a' = B'E + EC' = B'E + DC' - DE = 90^\circ + 90^\circ - A = 180^\circ - A. \tag{1.5}$$

În mod analog se obţine $b' = 180° - B$ şi $c' = 180° - C$.

Deoarece triunghiul polar al triunghiului sferic $A'B'C'$ este triunghiul ABC, avem:

$$\left.\begin{array}{rcl} a &=& 180° - A' \\ b &=& 180° - B' \\ c &=& 180° - C' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A' &=& 180° - a \\ B' &=& 180° - b \\ C' &=& 180° - c. \end{array}\right. \tag{1.6}$$

Din relaţiile (1.5) şi (1.6) rezultă că dacă triunghiul dat este dreptunghic, atunci triunghiul său polar este rectilater şi invers.

Pornind de la inegalitatea (1.3) scrisă pentru triunghiul sferic $A'B'C'$: $a' < b' + c'$ şi ţinând seama de relaţiile de tipul (1.5), se obţine $180° - A < 180° - B + 180° - C$, sau:

$$B + C < A + 180°. \tag{1.7}$$

Pornind de la inegaliăţile (1.4) scrise pentru triunghiul $A'B'C'$ şi ţinând seama de relaţiile (1.5), obţinem: $0° < 180° - A + 180° - B + 180° - C < 360°$, sau:

$$180° < A + B + C < 540°. \tag{1.8}$$

Diferenţa:

$$\varepsilon = A + B + C - 180° \tag{1.9}$$

se numeşte exces sferic şi este o proprietate caracteristică a triunghiului sferic. Într-adevăr, $A + B + C = 180° + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0°)$, adică suma unghiurilor triunghiului sferic ABC este mai mare decât 180°.

1.4. *Să se deducă formula pentru aria triunghiului sferic ABC.*

Rezolvare. Aria triunghiului sferic ABC de pe sfera de rază R (fig.1.5) se poate deduce uşor, dacă observăm că suma ariilor celor trei fuse sferice $(AA A', BB', CC')$ care au drept unghiuri unghiurile triunghiului sferic dat acoperă emisfera vizibilă a sferei plus de două ori aria S_{ABC} a triunghiului sferic dat. Ţinând seama şi de faptul că aria fusului sferic este dată de (1.2), rezultă:

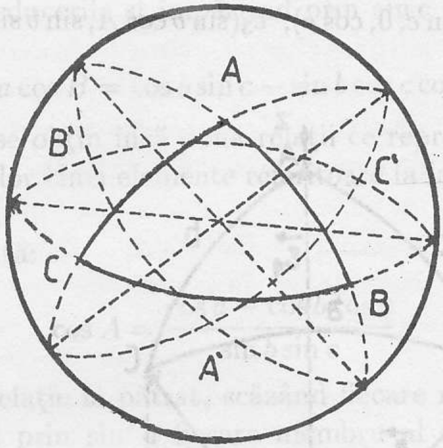

Figura 1.5: Pentru determinarea ariei triunghiului sferic.

$$2R^2 \text{măs}(\hat{A}) + 2R^2 \text{măs}(\hat{B}) + 2R^2 \text{măs}(\hat{C}) - 2S_{ABC} = 2\pi R^2,$$

sau:

$$R^2(\text{măs}(\hat{A}) + \text{măs}(\hat{B}) + \text{măs}(\hat{C}) - \pi) = S_{ABC},$$

de unde, utilizând notaţia (1.9), se obţine:

$$S_{ABC} = \varepsilon R^2 \quad \text{sau} \quad S_{ABC} = \frac{\pi R^2}{180^\circ}\varepsilon. \tag{1.10}$$

Dacă $R = 1$, rezultă că $\varepsilon = S_{ABC}$.

1.5. *Să se deducă formulele ce exprimă teoremele cosinusului, sinusului şi formula celor cinci elemente referitoare la laturile triunghiului sferic ABC (formulele lui Gauss).*

Rezolvare. Se consideră triunghiul sferic ABC de pe sfera cu centrul în O şi de rază unitate ($R = 1$). Alegem sistemul trirectangular de referinţă $Oxyz$ astfel încât axa Oz să intersecteze sfera în vârful A al triunghiului, iar vârful B să aparţină planului xOz

(fig.1.6). Componentele vectorilor de poziţie ai vârfurilor triunghiului sunt: $\vec{e}_1(0,0,1)$; $\vec{e}_2(\sin c, 0, \cos c)$; $\vec{e}_3(\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b)$.

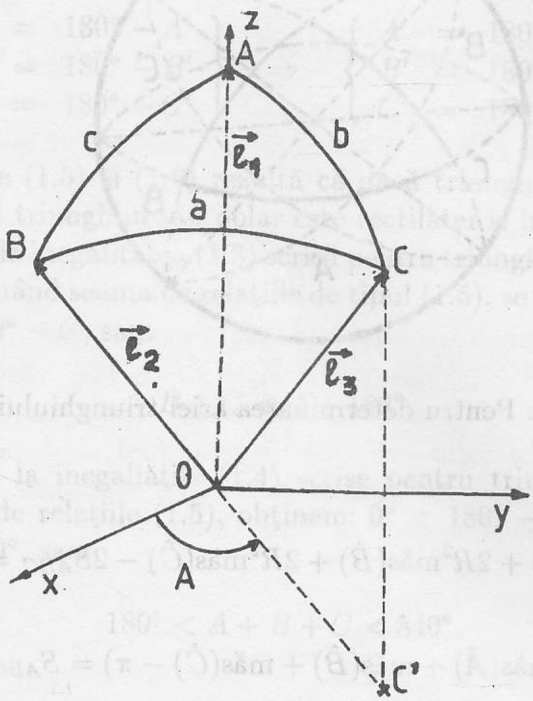

Figura 1.6: Pentru deducerea formulelor de bază ale trigonometriei

Făcând produsul scalar al vectorilor unitari $\vec{e}_2$ şi $\vec{e}_3$, obţinem:

$$(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \|\vec{e}_2\| \cdot \|\vec{e}_3\| \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

sau:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \tag{1.11}$$

În mod analog se obţin şi formulele:

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \tag{1.12}$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \tag{1.13}$$

Aceste formule reprezintă teorema cosinusului referitoare la laturile triunghiului sferic ABC.

Înmulţind (1.11) cu $\cos c$ şi adunând membru cu membru la relaţia (1.12), efectuând reducerile şi împărţind prin $\sin c$ relaţia rezultată, se obţine:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A. \tag{1.14}$$

În mod analog se obţin încă două relaţii ce reprezintă, împreună cu (1.14), formulele celor cinci elemente referitoare la laturile unui triunghi sferic ABC.

Din (1.11) rezultă:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Ridicând această relaţie la pătrat, scăzând fiecare membru al egalităţii din 1 şi împărţind prin $\sin^2 a$ fiecare membru al relaţiei rezultate, se obţine:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}.$$

Având în vedere faptul că membrul din dreapta al acestei relaţii este o funcţie simetrică în raport cu a, b, c, rezultă că:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}. \tag{1.15}$$

Aceste formule reprezintă teorema sinusului referitoare la laturile unui triunghi sferic ABC.

Relaţiile:

$$\begin{aligned} &\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ &\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, \\ &\sin a \sin B = \sin b \sin A \end{aligned} \tag{1.16}$$

constituie formulele fundamentale ale trigonomtriei sferice şi poartă numele de formulele lui Gauss.

Prin permutarea circulară a literelor din (1.16) se obţin trei grupe de relaţii fundamentale:

$$\text{(I)} \quad \begin{aligned} &\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ &\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\ &\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C; \end{aligned}$$

$$\text{(II)}\quad \begin{aligned}\sin a\cos B &= \cos b\sin c - \sin b\cos c\cos A,\\ \sin a\cos C &= \cos c\sin b - \sin c\cos b\cos A,\\ \sin b\cos C &= \cos c\sin a - \sin c\cos a\cos B,\\ \sin b\cos A &= \cos a\sin c - \sin a\cos c\cos B,\\ \sin c\cos A &= \cos a\sin b - \sin a\cos b\cos C,\\ \sin c\cos B &= \cos b\sin a - \sin b\cos a\cos C;\end{aligned}$$

$$\text{(III)}\quad \begin{aligned}\sin a\sin B &= \sin b\sin A,\\ \sin b\sin C &= \sin c\sin B,\\ \sin c\sin A &= \sin a\sin C.\end{aligned}$$

Prin introducerea elementelor auxiliare m şi M, date de relaţiile:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} M &= \operatorname{tg} b\cos A,\\ m &= \frac{\cos b}{\cos M} = \frac{\sin b\cos A}{\sin M}\end{aligned} \tag{1.17}$$

(deduse din notaţiile: $\cos b = m\cos M$ şi $\sin b\cos A = m\sin M$), primele două formule din (1.16) se transformă în două expresii calculabile prin logaritmi, şi anume:

$$\begin{aligned}\cos a &= m\cos(c - M),\\ \sin a\cos B &= m\sin(c - M).\end{aligned} \tag{1.18}$$

1.6. *Să se deducă formulele lui Gauss referitoare la unghiurile triunghiului sferic ABC.*

Rezolvare. Scriind formulele lui Gauss (1.16) pentru triunghiul polar $A'B'C'$ al triunghiului ABC şi ţinând seama de relaţiile (1.5) şi (1.6), se obţine:

$$\begin{aligned}\cos A &= -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a,\\ \sin A\cos b &= \cos B\sin C + \cos C\sin B\cos a,\\ \sin A\sin b &= \sin a\sin B,\end{aligned} \tag{1.19}$$

adică formulele lui Gauss referitoare la unghiurile triunghiului sferic ABC.

Observaţie. Formulele lui Gauss pot fi deduse şi prin alte metode ca: metoda rotaţiei axelor de coordonate, metoda matricială, metoda vectorială etc.